

INTRODUCTION AU TRAITEMENT DU SIGNAL EN RMN

1. Généralités

Pourquoi "traiter le signal" ? Une mesure RMN nous fournit un nombre considérable de données (une acquisition comporte en général de mille à plusieurs millions de points). Ce que l'expérimentateur recherche est souvent limité à une réponse, parfois binaire (oui ou non), à un nombre de questions restreint (en spectroscopie : y a-t-il telle espèce chimique dans l'échantillon ? en quelle quantité ? en imagerie : existe-t-il des hétérogénéités dans la coupe sélectionnée ? etc.). Il s'agit donc d'extraire l'information intéressante d'un ensemble important de données : on peut qualifier le traitement du signal de "réduction de données" [Rutledge, 1996]. Dans un grand nombre d'expériences RMN, la précision requise sur les mesures ou les variations des paramètres ne permet pas de se contenter d'un traitement approximatif.

1.1. Définitions

Signal : « signe conventionnel qui sert à transmettre une information - forme physique d'une information véhiculée par un système ».

Traitement : « ensemble des techniques permettant de stocker des informations, d'y accéder, de les combiner, en vue de leur exploitation ».

Un système physique en évolution (précession des spins nucléaires en ce qui concerne la Résonance Magnétique Nucléaire) émet un message. Ce message est codé, c'est-à-dire qu'il est rendu détectable (induction du courant dans une bobine de détection). Le codage fournit donc le signal à transmettre. Ce signal est acheminé par un canal de transmission, reçu par un récepteur et enregistré : c'est ce qui constitue la mesure.

L'idéal serait que le résultat de la mesure donne directement l'information recherchée (ex : mesure d'une distance). Ce n'est, hélas, jamais le cas, même pour les signaux les plus simples, en raison du bruit de la mesure. Le signal subit donc un traitement, pour permettre accéder à l'information.

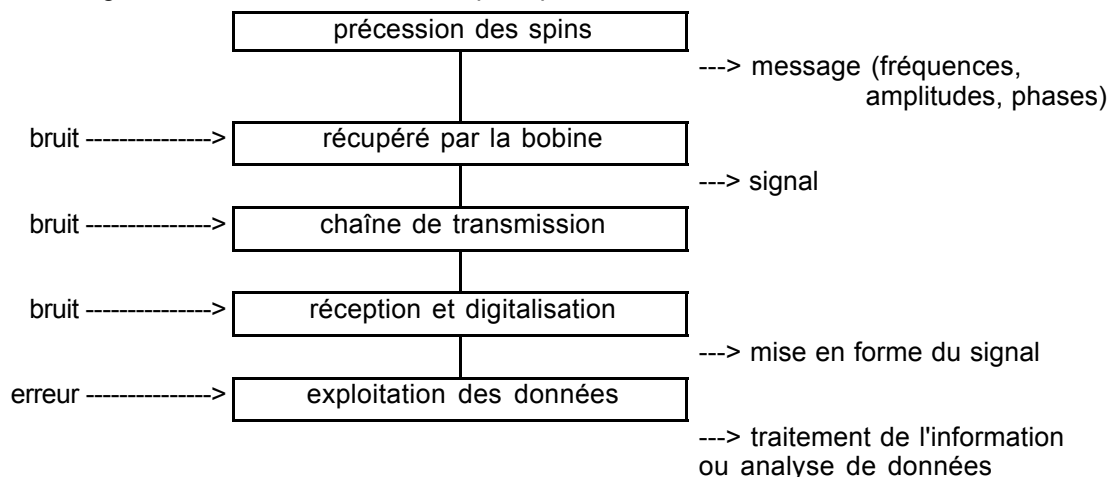


tableau I.1 : étapes d'acquisition d'un signal

Le signal mesuré est composé du message codé (une partie de la sortie du détecteur) et de bruit. Le message codé est un signal déterministe, c'est-à-dire un signal dont l'évolution, en fonction de la variable dépendante (ici le temps), peut être prédite parfaitement par une représentation mathématique appropriée. Le bruit est un signal aléatoire, i.e. un signal dont le comportement est imprévisible. Les signaux aléatoires sont caractérisés par leurs propriétés statistiques et fréquentielles. Le signal mesuré est un potentiel ou un courant, fonction continue du temps, caractérisé par sa fréquence, son amplitude et sa phase.

	temps continu	temps discret
amplitude continue	<i>signal analogique</i>	XXXXXXXXXXXXXXXXXX
amplitude discrète	<i>signal quantifié</i>	<i>signal digital ou numérique</i>

tableau 1.2 : rappel de définitions

En RMN, l'information recherchée consiste en :

- fréquences de l'échantillon (spectrale ou spatiale : localisation en imagerie),
- amplitudes et phases contenues dans le signal (forme de raie, contraste...).

Données de départ :

- signal temporel, acquis pendant une durée limitée, digitalisé (*mise en forme*)
- mêlé à du bruit,
- soumis à un traitement informatique, source d'erreurs supplémentaires.

1.2. Outils

De façon très générale [Duvaut, 1994], les étapes nécessaires au traitement du signal et de l'analyse de données peuvent être classées en :

- constitution d'une banque d'informations *a priori*, portant sur
 - + l'analyse physique des phénomènes (ordre de grandeur des fréquences, des amplitudes, des temps de relaxation, ...)
 - + les propriétés des signaux : on peut modéliser un résultat de mesure par : $D = f(S) + B$, avec D les données mesurées, S ce que l'on cherche à évaluer (le message), B le bruit de la mesure. On appellera f fonction de transfert (caractéristique du type de mesure et des imperfections de l'appareil de mesure).
Il faut garder à l'esprit que, quelles que soient les méthodes de traitement du signal employées, il y a toujours introduction d'informations *a priori*.
- liste de fonctions successives à mettre en œuvre, de type
 - 1- mise en forme des signaux : par convolution, transformée de Fourier discrète (élaboration de filtres, apodisation, correction de ligne de base, correction de phase, quantification...), ce qui permettra de traiter ces signaux de façons optimale.
 - 2- caractérisation du signal (appartenance à des grandes classes ayant des propriétés communes caractéristiques - recensement de ces classes). Cette étape a pour but de déterminer les paramètres pertinents pour l'analyse envisagée. Ce classement se fait à partir de la nature physique du phénomène : les paramètres et, par conséquent, les méthodes utilisées pour les déterminer dépendent en effet directement de la nature des signaux. Exemple : pour un signal que l'on étudie pendant une durée inférieure au temps de quasi-stationnarité, les paramètres pertinents peuvent être la fonction de corrélation et la densité spectrale. Les méthodes correspondantes peuvent être l'analyse spectrale ou l'analyse corrélatrice. En RMN, les paramètres sont la fréquence, la phase et l'amplitude des signaux, qui peuvent dépendre de la nature et de la densité des noyaux, des temps de relaxation, de la diffusion, de la localisation spatiale, de la structure des molécules (couplage...), etc. suivant le type d'expérience RMN réalisée. Ces paramètres peuvent se traduire ensuite en largeur de raie, contraste, corrélation, etc.
 - 3- détection : il s'agit de l'étude des variations de ces paramètres et de la détermination de critères d'estimation de la signification ou non de ces variations (maximum de vraisemblance, estimation linéaire en moyenne quadratique...), par exemple, détermination d'un seuil de significativité pour l'exploitation des images fonctionnelles...
 - 4- modélisation/identification/classification :
 - La *modélisation* met en correspondance les données avec des modèles de signaux. Cela nécessite l'élaboration d'un catalogue de modèles et le choix de critères d'adéquations (modèles auto-régressifs, à moyenne ajustée, ARMA, prédiction linéaire, maximum d'entropie, ...). On peut modéliser l'effet de tel paramètre (diffusion, flux, température...) sur le signal RMN dans tel ou tel environnement ou circonstance.
 - L'*identification* est un problème voisin : on dispose d'une connaissance supplémentaire concernant un mécanisme physique, source des données disponibles, et qui permet d'établir une relation mathématique de cause à effet entre ces données et une autre grandeur physique à laquelle on cherche à s'identifier. Par exemple, en RMN, connaissant les mécanismes de transfert d'aimantation, on sera à même d'identifier des pics de corrélation sur une carte 2D, ou, plus simplement, connaissant les déplacements chimiques, d'attribuer sur un spectre 1D tel ou tel pic à tel ou tel noyau.

- La *classification* est l'étape permettant d'attribuer ou non à une classes les grandeurs physiques résultat du traitement (--> prise de décision par reconnaissance de formes, réseaux de neurones, démarches statistiques...). Cette étape de classification peut intervenir lors de l'exploitation de spectres devant donner lieu à un diagnostic clinique, par exemple.

5- codage/décodage : compression des données en respectant l'information qu'elles contiennent (encombrement réduit, facilité de transmission...)

- définition des méthodes et procédures à mettre en place pour réaliser les fonctions précédemment décrites, évaluer les performances et limites de ces méthodes.
- implémentation d'algorithmes opérant sur les données : ces algorithmes, correspondant aux méthodes et procédures, doivent être numériquement stables et aussi peu compliqués que possibles (simplicité des itérations), il faut savoir en prédéterminer les critères de convergences (paramètres d'initialisation) et évaluer la précision des résultats.
- évaluation de la qualité de la chaîne --> définition de critères et choix (entre performance et simplicité, ...)

Quels sont les outils mathématiques au service du traitement du signal ?

- outils stochastiques (probabilités, statistiques, processus aléatoires)
- outils déterministes (transformées, fonction de la variable complexe, distribution, analyse fonctionnelle)
- outils d'analyse numériques (algèbre, programmation)

Il est donc nécessaire au spectroscopiste (ou à celui qui a la charge d'exploiter les données) de posséder une certaine culture mathématique tant pour l'interprétation des résultats que le choix des paramètres, la compréhension d'un algorithme, etc. Il n'est pas possible de se contenter d'utiliser un programme de traitement comme une boîte noire, dont sortiraient des chiffres exploitables.

Ce cours portera essentiellement sur la partie "mise en forme" des signaux RMN et les caractéristiques physiques inhérentes à la nature de ces signaux. De cette étape dépend toute l'exploitation des résultats, qui peut s'effectuer, une fois les données fournies de façon fiable, par des méthodes standards d'analyse de données, puis donner lieu à une exploitation statistique des résultats.

2. Le signal

Que mesure-t-on ? et comment ?

Le signal RMN n'est pas stationnaire dans le temps. En RMN par transformée de Fourier, le signal décroît lentement après l'impulsion initiale. De plus, comme tout signal expérimental, le signal RMN est causal (i.e. nul avant le temps $t=0$: on ne peut avoir du signal avant une impulsion).

A l'équilibre thermique, l'aimantation nucléaire est $M_0 = NB_0 \gamma^2 \hbar^2 I(I+1)/12\pi^2 kT$, avec N le nombre de spins, B_0 le champ magnétique statique, γ le rapport gyromagnétique du noyau considéré, $\hbar$ la constante de Planck, k la constante de Boltzmann, et I le spin.

Définition : On appelle souvent FID (Free Induction Decay) le signal RMN, c'est le signal de précession libre (en l'absence donc de perturbations) acquis après une séquence d'impulsions.

2.1. Détection simple

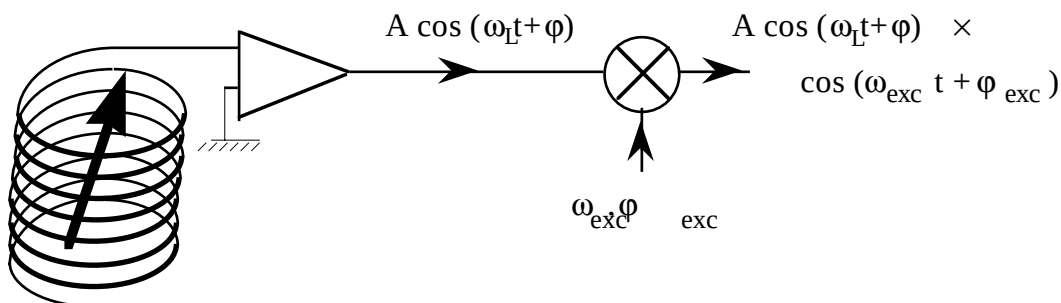


fig. I.1 : acquisition du signal RMN en détection simple

Le signal à la fréquence de Larmor ω_L passe par un mélangeur qui le multiplie par une modulation à la fréquence d'émission ω_{exc} (ou fréquence d'excitation ou fréquence de la porteuse) avec la phase d'émission φ_{exc} .

$$A \cos(\omega_L t + \varphi) \cos(\omega_{exc} t + \varphi_{exc}) = \frac{A}{2} \cos((\omega_L + \omega_{exc}) t + \varphi + \varphi_{exc}) + \frac{A}{2} \cos((\omega_L - \omega_{exc}) t + \varphi - \varphi_{exc})$$

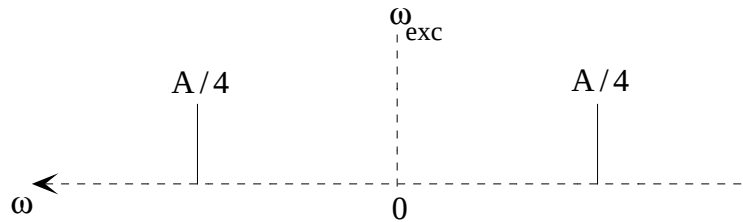
La composante de fréquence ($\omega_L + \omega_{exc}$), de l'ordre de $2\omega_{exc}$ (plusieurs MHz), est éliminée par filtrage passe-bas, avant digitalisation.

La fréquence de précession détectée ($\omega_L - \omega_{exc}$) est la fréquence de résonance, dans le repère tournant, du spin considéré. Je la noterai ω . On dira qu'on est à la résonance (on-résonance) quand $\omega_L = \omega_{exc}$, i.e. $\omega = 0$. On est hors résonance (off-résonance) quand $\omega_L \neq \omega_{exc}$, i.e. $\omega \neq 0$.

On obtient donc un signal de la forme :

$$\frac{A}{2} \cos \{ (\omega_L - \omega_{exc}) t + \varphi - \varphi_{exc} \}$$

On ne sait plus rien du signe de ω , i.e. on ne sait plus si $\omega_L > \omega_{exc}$ ou $\omega_L < \omega_{exc}$. Pour chaque ω , on a deux raies symétriques :



Donc si, en particulier, on a dans l'échantillon plusieurs espèces dont les fréquences de résonances sont réparties autour de ω_{exc} , on ignore quelles raies sont réelles. Pour lever l'ambiguïté, il faut déplacer la fréquence de la porteuse de sorte qu'elle soit à une extrémité du spectre.

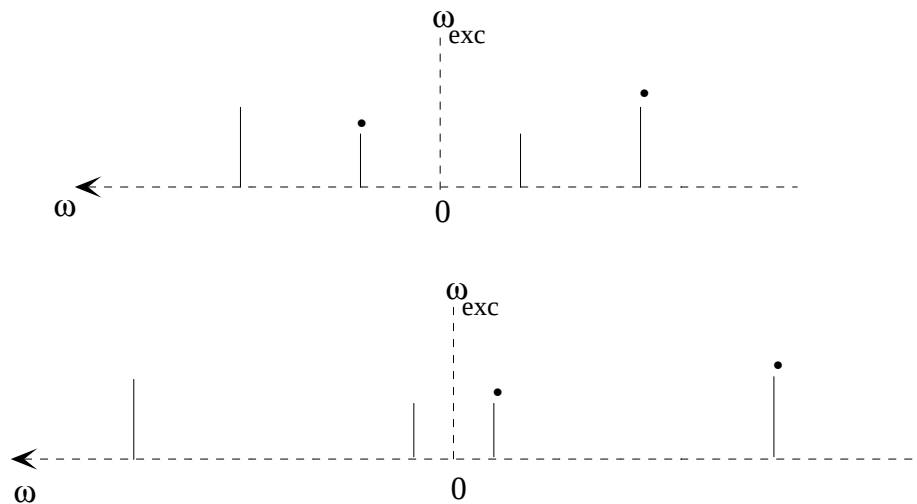
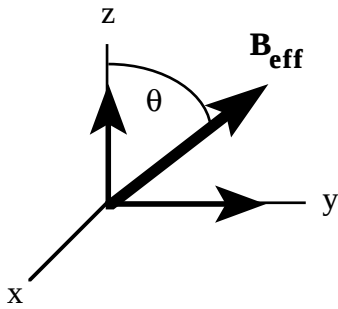


fig. 1.2 : position des raies en cas de détection simple. Les pics surmontés d'un point correspondent aux raies réelles (fréquence de l'échantillon). Dans le cas de la porteuse située à une extrémité du spectre (schéma inférieur), les raies réelles sont regroupées d'un même côté de la porteuse. On n'affiche dans ce cas-là que l'un des domaines de fréquence.

Ce déplacement de la fréquence d'excitation pose le problème des raies hors résonance. On a en effet

$$\mathbf{B}_{eff} = \left(\mathbf{B}_0 + \frac{\omega_{exc}}{\gamma} \right) \mathbf{k} + \mathbf{B}_1 \mathbf{j}, \text{ avec } \mathbf{B}_0 = \frac{-\omega}{\gamma}.$$

Si ω est très éloigné de ω_{exc} , l'aimantation après une impulsion 90° (à la résonance) ne sera pas dans le plan transverse, ce qui induit des modifications de phase et d'amplitude du signal.



Par exemple, en ^{13}C , pour une bande fréquentielle de déplacement chimique SW de 20 kHz et une durée d'impulsion $\tau = 10 \mu\text{s}$ correspondant à un angle 90° , (i.e. une largeur d'excitation $\Delta\nu = 1/4\tau = 25 \text{ kHz}$), l'angle θ entre le champ effectif et le champ B_0 sera tel que $\text{tg}\theta = \Delta\nu/\text{SW} = 1.25$ à l'extrémité du spectre. Le champ effectif a une composante longitudinale plus grande que celle transverse.

2.2. Détection en quadrature

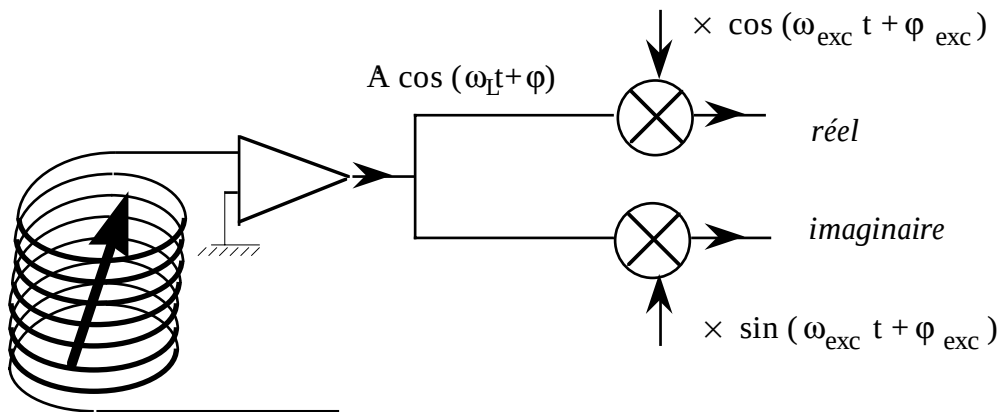
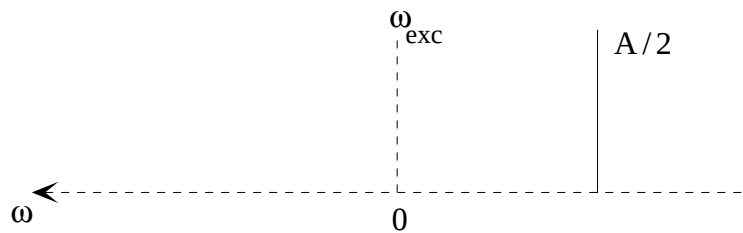


fig. 1.2 : acquisition du signal RMN en détection en quadrature

Le signal s'écrit sous une forme complexe, qui permet de préciser le signe de ω . Après filtrage de la composante de fréquence $(\omega_L + \omega_{\text{exc}})$, on obtient un signal de la forme :

$$s(t) = \frac{A}{2} \exp i ((\omega_L - \omega_{\text{exc}}) t + \phi - \phi_{\text{exc}})$$

dont la transformée de Fourier est une raie à la fréquence ω .



On remarquera que le choix de détection simple ou quadrature influe donc sur le rapport signal/bruit (amélioration de $\sqrt{2}$).

La qualité d'un spectre est généralement évaluée par deux paramètres, appelés **résolution** et **sensibilité**. La résolution correspond à la faculté de séparer des composantes proches en fréquence, la sensibilité se rapporte à la capacité de distinguer le signal du bruit. La sensibilité de la détection rf varie en fonction du rapport gyromagnétique du noyau considéré, du spin, du nombre de noyaux, du champ, du T_2^* , de la température, du facteur de remplissage de la bobine de réception, du facteur de qualité de la bobine de réception, du volume vu par la bobine de réception, de l'échantillon... [Freeman, 1987]

3. Le bruit

3.1. Définitions

Il est difficile d'en donner une définition exacte. Le bruit représente tout ce que l'on ne peut pas (ne veut pas) introduire dans la fonction de transfert. Même dans un cas idéal (la mesure donnant immédiatement la réponse), il y a présence de bruit, ce qui implique qu'on ne peut pas obtenir le signal avec une précision infinie. Le bruit, en première approximation, ne transporte pas l'information intéressante, ou jugée comme telle par l'expérimentateur. Les sources en sont variées : bobine, préamplificateur, digitalisation...

Il y a principalement 3 classes de bruit :

- + le bruit électronique, aléatoire,
- + le bruit du système et de l'environnement (bruits de scintillement),
- + le bruit de quantification, de calcul.

Pour le *bruit électronique*, aléatoire, la densité spectrale de bruit est $b^2 = 4k_B RT$, R étant la résistance équivalente, à la température T . Ce bruit électronique aléatoire correspond au bruit:

- intrinsèque à la bobine : bruit de Johnson - agitation thermique des électrons : $\propto R_C T_C$ (résistance et température de la bobine)
- bruit induit par l'échantillon : bruit par couplage magnétique, agitation thermique des charges électriques à proximité de la bobine de détection $\propto R_s T_s$ (résistance et température de l'objet/tissus/sujet...)

Le bruit total est donc proportionnel à $(R_C T_C + R_s T_s)^{1/2}$. Ce bruit de détection du spectromètre est complètement décorrélié du signal et donc incohérent avec lui. On peut y rajouter le bruit:

- provenant du pré-amplificateur
- induit par des interférences avec des sources extérieures

Le *bruit du système* et de l'environnement est le bruit dû au changement d'état de l'échantillon (mouvements, température, dégradation, etc.) ou de la stabilité du système (variabilité...). C'est un bruit dont les paramètres statistiques sont difficiles à évaluer et, par conséquent, délicat à traiter. C'est le type du bruit en t_1 (t_1 noise) en particulier.

Le *bruit de quantification* provient de la conversion analogique/numérique. On reviendra dessus ultérieurement. On peut rajouter le "bruit" informatique (arrondis...).

On s'intéressera essentiellement au bruit aléatoire, dont les caractéristiques sont des paramètres statistiques (moyenne, variance et écart-type, fonction de corrélation). On admet généralement que le bruit en RMN peut être modélisé par un bruit blanc stationnaire.

3.2. Rappel succinct sur les variables aléatoires

3.2.1. Statistique descriptive

On appelle aléatoire une variable dont on ne peut pas savoir la valeur AVANT l'expérience. Après une mesure (ou un comptage), on dispose de données, que l'on peut présenter sous forme de tableaux (variable discrète) ou d'histogramme (variable continue). On peut vouloir en tirer quelques paramètres représentatifs : il s'agit alors de **statistique descriptive**. Ces paramètres possibles de statistique descriptive sont les *paramètres de position centrale*, dont :

- la **moyenne arithmétique** : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- la **moyenne quadratique** : $\overline{x_q} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$

et les *paramètres de dispersion*, dont :

- l'**écart-type** : $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$. On appelle **variance** le carré de l'écart-type. La variance $s^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2$.

Si on recommence la mesure, on pourra obtenir d'autres valeurs pour ces paramètres : ce sont eux-mêmes des variables aléatoires. Si l'on veut essayer de prédire un peu les résultats, il faut faire appel aux probabilités.

3.2.2. Variables aléatoires

Une **variable aléatoire (v.a.) continue** est une fonction X , réelle ou complexe, mesurable, à laquelle est associée une **probabilité de mesure** $P(A)$ avec $A(x)$ étant l'ensemble des points n tels que la réalisation de la fonction $X : X(n) \leq x$

$$A(x) = \{ n / X(n) \leq x \}$$

$P(A)$ est appelée **fonction de distribution**, ou **fonction de répartition** de X , souvent écrite $F(x)$.

$$F(x) = P[A(x)] = P[X(n) \leq x] = P[X \leq x] \quad \text{on note que } F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$$

Si $F(x)$ est continue et dérivable, $p(x) = \frac{dF}{dx}$ est la **fonction de densité de probabilité**. On peut se représenter cette fonction comme la limite d'un histogramme de mesures de la v.a. X quand on augmente le nombre de mesures. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

On parlera de **v.a. gaussienne** si la fonction de densité de probabilité suit une loi normale (i.e. gaussienne).

L'**espérance mathématique**, (souvent appelée moyenne) de la v.a. X est

$$E(X) = \int x p(x) dx = \int x dF(x)$$

$$E(X) = \sum_i p_i x_i \text{ pour des données discrètes.}$$

La **variance théorique**, (souvent appelée variance) qu'on notera σ^2 , est $\sigma^2 = \int p(x) (x - E(X))^2 dx$

$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 \right)$ pour des données discrètes. On appelle **écart-type théorique**, (souvent appelé écart-type) σ de la v.a. X (en anglais, root mean square value - r.m.s.) la racine carrée de la variance théorique.

On appelle **moment d'ordre k**, $m_k = E(X^k) = \int x^k p(x) dx$.

On peut noter que $E(X - m_1) = 0$. La v.a. $(X - m_1)$ est une variable centrée, c'est-à-dire d'espérance nulle.

On appelle **moment central d'ordre k**, $\mu_k = E((X - m_1)^k)$. On a donc $\mu_1 = 0$.

$\mu_2 = E((X - m_1)^2) = E(X^2 - 2m_1X + m_1^2) = m_2 - m_1^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma^2$, la variance de la variable X correspond donc au moment central d'ordre 2.

La **fonction de covariance** de deux variables X et Y est le nombre : $\text{cov}[X, Y] = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$

3.2.3. Processus stochastique

On appelle **processus stochastique** une famille de fonctions $X(t)$, réelle ou complexe, où, pour des temps $t_1, t_2, \dots, t_n$, les quantités $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont des variables aléatoires [Papoulis, 1991]. On parle de processus centré quand la valeur moyenne du processus est nulle. On parle donc de **bruit centré** si la valeur moyenne du bruit est nulle.

La **fonction d'auto-corrélation** d'un processus $X(t)$ est $\gamma(t_1, t_2) = E(X(t_1)X^*(t_2))$.

Si $X(t; s)$ est un signal aléatoire centré (avec s indexant le numéro de l'expérience), alors $P(t; s) = |X(t; s)|^2$ est la **puissance aléatoire instantanée** de la fonction $X(t)$. On parlera d'**intensité moyenne** ou de **puissance moyenne** pour $P(t) = E\{P(t; s)\} = \gamma(t, t) = E(|X(t)|^2)$.

L'**énergie** est définie par $J(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t; s)|^2 dt$.

La **corrélation croisée** concerne deux processus $X(t)$ et $Y(t)$, elle est définie par $\gamma_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)Y^*(t_2))$.

On peut également définir la **fonction d'auto-covariance** par $C(t_1, t_2) = \gamma(t_1, t_2) - E(X(t_1))E(X^*(t_2))$. On note que dans le cas d'un processus centré, l'auto-covariance est égal à l'auto-corrélation.

Un processus stochastique $X(t)$ est dit **strictement stationnaire** si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes par translation d'origine des temps. Cela est impossible à vérifier dans le monde réel sur toute la gamme des possibilités $(-\infty \text{ à } +\infty)$. On dira que $X(t)$ est **stationnaire** au sens commun quand la valeur moyenne, m , de $X(t)$ est indépendante de t (caractéristique inchangée par un décalage d'origine) et que sa fonction d'auto-corrélation, g , ne dépend que de la différence $t = t_1 - t_2$. On a alors $\gamma(\tau) = E(X(t+\tau)X^*(t)) = E(X(t+\tau/2)X^*(t-\tau/2))$. Cela implique aussi que la fonction d'auto-covariance C ne dépend également que de t . Si $X(t)$ est stationnaire, alors $C(\tau) = \gamma(\tau) - |m|^2$ et $C(t=0)$ est la variance de $X(t)$. La puissance moyenne de $X(t)$ est alors $\gamma(0)$, qui est égale à la variance si le processus X est centré.

Représentation spectrale : à un signal continu $x(t)$, on peut associer $X(\omega) = FT \{x(t)\}$.

La **densité spectrale de puissance** $\Gamma(\omega)$ d'un processus stationnaire $X(t)$ est la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation :

$$\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

On remarque que l'aire de cette fonction Γ correspond à la puissance moyenne de $X(t)$

$$P = \gamma(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\omega) d\omega$$

On appelle donc souvent $\Gamma(\nu)$ **spectre de puissance** ou, simplement, le spectre du signal aléatoire $X(t)$.

Autres références : [Max, 1972 ; Papoulis, 1977 ; Picinbono, 1993]

3.3. Le bruit en RMN

Le bruit est, en général, aléatoire et blanc. On parle de **bruit blanc** quand la densité spectrale de puissance $\Gamma(\nu)$ (= TF de la fonction d'auto-corrélation) de la fonction aléatoire de bruit $b(t)$ est constante sur l'étendue des fréquences,

$$\Gamma(\nu) = \int \langle b(t+\tau) b(\tau) \rangle e^{-2i\pi\nu\tau} d\tau = \text{cte}$$

$$= 4 k_B RT \text{ (R: résistance équivalente, T: température, } k_B \text{: cte de Boltzmann), en V}^2/\text{Hz}$$

ce qui revient à dire que la puissance du bruit, dans une gamme de fréquence donnée, ne dépend pas de la position de cette gamme dans l'étendue possible du spectre, ou encore que la fonction d'auto-corrélation d'un tel bruit est une impulsion de Dirac ($\gamma(t) = \sigma^2 \delta(t)$) : la fonction de corrélation est nulle pour toutes les valeurs de t sauf pour $t=0$). Toutes les fréquences ν sont représentées de manière équivalente.

Concrètement, on parlera de bruit blanc en considérant un bruit, de moyenne nulle (il est toujours possible de s'y ramener), dont le spectre de densité de puissance est constant sur la bande passante

utile des signaux considérés, sans se préoccuper de l'extérieur. Un signal blanc est donc une séquence de signaux aléatoires, non corrélés et de même variance.

Lors de la détection en quadrature, l'écart-type d'un tel bruit, limité par un filtre de fréquence de coupure f_c , est

$$\sigma_t = \sqrt{2 f_c} \rho_t$$

$2 f_c = F$ est la largeur spectrale

ρ_t est la racine carrée de la densité spectrale de puissance. C'est une constante, égale à la racine carrée de la puissance du bruit par unité de largeur de bande :

$$\rho_t = \sqrt{\frac{\langle b^2(t) \rangle}{F}}$$

Pour la détermination expérimentale, on travaille dans le cadre de **l'ergodicité**, c'est-à-dire que la moyenne d'ensemble (sens des probabilités) peut être remplacée par la moyenne temporelle :

$$\sigma_t^2 = E(b^2(t)) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} b_m^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T b^2(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} b^2(t_n)$$

Le bruit b est une variable aléatoire. On sait que, rapidement, la somme de processus aléatoires quelconques conduisent à une **densité de probabilité gaussienne** $P(x)$

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2}$$

On a bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1$$

$$\pi \int_0^{+\infty} \exp^{-x} dx \text{ La valeur moyenne (ou espérance mathématique) est}$$

$$\langle b \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2} dx = 0$$

Les différents moments

$$\langle b^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2} dx = \sigma^2 \quad \text{car} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\langle b^3 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2} dx = 0, \text{ ainsi que tous les moments d'ordre impair}$$

$$\langle b^4 \rangle = 3\sigma^2$$

La variance d'un bruit gaussien centré de probabilité $P(x)$ est σ^2 . L'écart-type est σ .

Le bruit acquis en RMN, par la détection en quadrature, est un bruit complexe :

$$b(t) = x(t) + iy(t)$$

où x et y sont non corrélés (linéairement indépendants), chacun supposé de densité de probabilité gaussienne. La **norme de ce bruit** (ou **module**) vérifie

$$\begin{aligned} P(r=\sqrt{x^2+y^2}) dr &= P(x) P(y) dx dy \\ &= P(x) P(\sqrt{r^2-x^2}) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2} \exp -\frac{r^2-x^2}{2\sigma^2} 2\pi r dr \\ &= \frac{r}{\sigma^2} \exp -\frac{r^2}{2\sigma^2} dr \end{aligned}$$

appelé loi de Rayleigh.

On a alors ($r > 0$ car il s'agit d'un module)

$$\langle r \rangle = \int_0^{+\infty} r P(r) dr = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rightarrow \text{le bruit n'est plus centré.}$$

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{+\infty} r^2 P(r) dr = 2\sigma^2 \rightarrow V(r) = 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2 \quad \text{l'écart-type est inférieur à } \sigma.$$

Cette distribution n'est valable qu'en absence de signal. La distribution du bruit d'un spectre (ou image) "module" est plus généralement de type Rician [Gudbjartsson, 1995].

4. Le rapport signal/bruit

Ce qui permet d'estimer la qualité d'une mesure est le **rapport signal/bruit** à l'endroit du signal (i.e. dans la largeur de bande du signal et non pas dans la largeur totale de l'acquisition). Ce rapport est défini conventionnellement par le rapport de l'amplitude A d'un signal donné (tension mesurée aux bornes de la bobine et amplifiée) sur la racine carrée de l'écart quadratique moyen, l'écart-type σ_t du bruit.

$$\frac{S}{N} = \frac{\text{Amplitude de la tension}}{\text{Ecart-type du Bruit}} = \frac{A}{\sigma_t}$$

Cette définition est purement conventionnelle. On y a introduit parfois en RMN un facteur 2 ou la valeur crête à crête du bruit.

$$\frac{S}{N} = \frac{A}{2 \sigma_t} \approx 2.5 \frac{A}{\text{bruit crête à crête}}$$

On peut également travailler en rapport de puissance ou sur un spectre de fréquence : Le rapport signal/bruit est alors le rapport de l'amplitude d'un pic sur l'écart-type σ_f du bruit. Il est donc toujours important de définir les conventions employées.

On définit parfois la **sensibilité** comme le rapport signal/bruit par unité de temps.

Pour **accroître le rapport signal/bruit**, les données sont traditionnellement accumulées (répétition de la même expérience, avec des paramètres rigoureusement identiques, et addition des résultats) :

- le signal, cohérent en phase et en amplitude d'une acquisition à l'autre, s'additionne en intensité (linéairement)
- si le bruit est aléatoire, il ne s'additionne pas linéairement (en intensité) mais en puissance :

$$P = \frac{\sigma_t^2}{R_{eq}}$$

avec R_{eq} , résistance équivalente du circuit. Pour n acquisitions, on a une puissance nP , l'écart-type correspondant est $\sqrt{n P R_{eq}}$.

$$\left[\frac{S}{N} \right]_{n \text{ scans}} = \frac{n A}{\sqrt{n P R_{eq}}} = \frac{n A}{\sqrt{n} \sigma_t} = \sqrt{n} \left[\frac{S}{N} \right]_{1 \text{ scan}}$$

Par accumulation de n acquisitions, le rapport signal/bruit croît en $\sqrt{n}$

On entend parfois dire que le bruit diminue ou tend vers zéro, par accumulation de données, c'est bien sûr totalement faux : le bruit croît aussi, mais moins rapidement que le signal .

Notons que pour les bruits de scintillement (dus à une mauvaise reproductibilité du signal), l'accumulation peut conduire à une détérioration du rapport signal sur bruit. Et il y a des bruits, cohérents avec le signal, pour lesquels l'accumulation n'a aucune influence sur le rapport signal sur bruit (bruit de quantification et autres bruits de mesure).

Bibliographie succincte :

ouvrages

- Duvaut P. *Traitement du signal - concepts et applications*. 2ème Ed, Hermès, Paris, 1994.
 Freeman R. *A handbook of nuclear magnetic resonance*. Longman Scientific & Technical, 1987.
 Hoch JC, Stern AS. *NMR data processing*. Wiley-Liss, New York (USA), 1996.
 Kunt M. *Traitement numérique des signaux*. vol 20 du Traité d'Électricité, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne (Suisse), 1984.
 Max J. *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Masson, Paris (France), 1972.
 Papoulis A. *Signal analysis*. McGraw-Hill, New York, 1977.
 Papoulis A. *Probability, random variables, and stochastic processes*. 3rd Ed, McGraw-Hill, New York, 1991.
 Picinbono B. *Random signals and systems*. Prentice Hall International Editions, Englewood Cliffs (New Jersey), 1993.
 Rutledge DN. *Signal Treatment and Signal Analysis in NMR*. Elsevier, Amsterdam, 1996.

articles

- Aue WP, Bachmann P, Wokaun A, Ernst RR. *Sensitivity of two-dimensional NMR spectroscopy*. J. Magn. Reson., 1978, **29**: 523-533.
 Gudbjartsson H, Patz S. *The Rician distribution of noisy MRI data*. Magn. Reson. Med., 1995, **34**: 910-914.
 Hoult DI. *The NMR receiver: a description and analysis of design*. Progress in Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy, 1978, **12**: 41-77.
 Levitt MH, Bodenhausen G, Ernst RR. *Sensitivity of two-dimensional spectra*. J. Magn. Reson., 1984, **58**: 462-472.
 Macovski A. *Noise in MRI*. Magn. Reson. Med., 1996, **36**: 494-497.
 McGibney G, Smith MR. *An unbiased signal-to-noise ratio measure for magnetic resonance images*. Med. Phys., 1993, **20**: 1077-1078.
 Mehlkopf AF, Korbbe D, Tiggelman TA, Freeman R. *Sources of T1 noise in two-dimensional NMR*. J. Magn. Reson., 1984, **58**: 315-323.
 Posse S, Cuenod C-A, Le Bihan D. *Motion artifact compensation in 1H spectroscopic imaging by signal tracking*. J. Magn. Reson. B, 1993, **102**: 222-227.
 Redfield AG, Kunz SD. *Quadrature Fourier NMR detection: simple multiplex for dual detection and discussion*. J. Magn. Reson., 1975, **19**: 250-254.
 Traficante DD. *Phase-sensitive detection - 1 : phase, gates, phase-sensitive detectors, mixers and the rotating frame*. Concepts in Magnetic Resonance, 1990, **2**: 151-167.
 Turner DL. *Sensitivity of two-dimensional NMR spectroscopy*. J. Magn. Reson., 1984, **58**: 500-501.
 Wedeen VJ, Wendt III RE, Jerosch-Herold M. *Motional phase artifacts in Fourier transform MRI*. Magn. Reson. Med., 1989, **11**: 114-120.

Wood ML, Henkelman RM. *MR image artifacts from periodic motion*. Med. Phys., 1985, **12**: 143-151.

Ziegler A, Décorps M. *Signal-to-noise improvement in in vivo spin-echo spectroscopy in the presence of motion*. J. Magn. Reson. B, 1993, **102**: 26-34.